2025학년도 중등학교교사 임용후보자 선정경쟁시험

수 학

수험 번호 : (   )　　　　　**성 명 : (   )**

제1차 시험	2 교시 전공A	12문항 40점	시험 시간 90분

○ 문제지 전체 면수가 맞는지 확인하시오.
○ 모든 문항에는 배점이 표시되어 있습니다.

1. (가)는 일차방정식 수업을 마친 후 학생 A가 쓴 자기성찰지의 일부이고, (나)는 강 교사가 학생 A를 관찰하고 작성한 수업일지의 일부이다. 괄호 안의 ㉠, ㉡에 해당하는 용어를 순서대로 쓰시오. [2점]

(가)

> 오늘 수업 시간에 등식의 성질 '$a=b$이면, $a+c=b+c$'를 이용하여 일차방정식 $x-3=7$을 푸는 방법을 배웠다. 그런데 일차방정식은 x에 특정한 수를 넣어야 참이 되는데, 등식의 성질에서는 c에 어떤 수를 넣어도 참이 되는 이유가 궁금해졌다. 선생님이 해 주신 설명을 들었는데도 아직 잘 모르겠다.
>
> 그리고 선생님께서 일차방정식 $x-3=7$과 $y-3=7$의 해가 같은지를 질문하셨다. 나는 문자 x와 y가 달라서 당연히 이 두 방정식의 해가 다를 것이라고 대답했다. 선생님이 이 두 방정식의 해가 같은 이유를 설명해 주셨는데, 아직도 그 이유가 잘 이해되지 않는다.

(나)

> 학생 A는 등식의 성질에서 사용된 문자 c가 특정한 수를 나타내는 것이 아니라 임의의 수를 나타낸다는 것을 이해하지 못하는 것으로 보인다. 또한 방정식에서 문자가 바뀌면 방정식의 해도 바뀐다고 생각하고 있는데, 방정식에서 문자를 임의로 선택할 수 있다는 것을 이해하지 못하는 것으로 파악된다.
>
> 이상에서 학생 A는 (㉠) 개념에 대한 인지장애를 가지고 있는 것으로 보인다. (㉠)은/는 주로 문자로 표현되며 다양한 측면을 가지고 있다. 그중에 $x-3=7$에서와 같이 방정식의 해를 나타내는 x는 자리지기로서의 (㉡)(으)로 사용된 경우이고, 등식의 성질 '$a=b$이면, $a+c=b+c$'에 쓰인 문자 a, b, c는 일반화의 표현을 위해 사용된 경우이다. 앞으로 학생 A에게 방정식의 문자 x가 나타내는 (㉡) 개념과 이를 포괄하는 (㉠) 개념을 최대한 쉽게 설명해 주는 기회를 마련해야겠다.

2. 좌표평면의 영역 D를

$$D=\left\{(x,\,y)\in\mathbb{R}^2 \mid -1\le xy\le 1,\ a\le x\le a+1\right\}\ (\text{단, } a\text{는 양수})$$

이라 하고, 이 영역의 경계를 시계반대방향으로 한 바퀴 도는 곡선을 C라고 하자. 영역 D의 넓이가 $2\ln 2$일 때, a의 값과 선적분

$$\int_C (2x-y)\,dx+(2x-y)\,dy$$

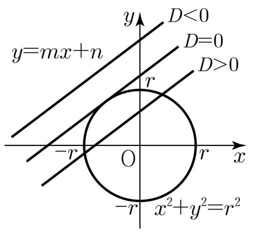
의 값을 순서대로 구하시오. [2점]

3. 표수(characteristic)가 a인 체 F에 대하여 군 G는 직접곱(직적, direct product) $\mathbb{Z}_4 \times F^*$이다. 군 G가 160 이하의 위수(order)를 갖는 순환군(cyclic group)이 되도록 하는 체 F 중에서 서로 동형(isomorphic)이 아닌 것의 개수를 b라고 하자.
이때, a와 b의 값을 순서대로 구하시오. (단, $\mathbb{Z}_4$는 덧셈 순환군이고, F^*는 체 F의 영(zero)이 아닌 모든 원소로 구성된 곱셈군이다.) [2점]

4. 서로 독립인 확률변수 $X_1, X_2, \cdots, X_9$가 모두 표준정규분포 $N(0, 1)$을 따른다. 확률변수 Y를 $Y = \sum_{i=1}^{9} (-1)^{i+1} X_i$라고 하면 $\mathrm{P}(Y \geq -7) = \mathrm{P}(X_1 \leq a)$를 만족시키는 실수 a가 존재한다.
이때, Y의 분산 $\mathrm{V}(Y)$와 a의 값을 순서대로 구하시오. [2점]

5. (가)는 신임 교사가 작성한 교수·학습 지도안의 개요이고, (나)는 이 개요에 대해 신임 교사와 수석 교사가 나눈 대화이다. <작성 방법>에 따라 서술하시오. [4점]

(가)

학습 목표	좌표평면에서 원과 직선의 위치 관계를 판단할 수 있다.
단계	교수·학습 활동
도입	• 실생활 상황을 제시하여 동기 유발 활동을 한다. • 학습 목표를 확인한다.
전개	• 직선의 방정식 $y = mx + n$을 원의 방정식 $x^2 + y^2 = r^2$에 대입하여 이차방정식을 얻는다. • '이차방정식으로부터 원과 직선의 위치 관계 도출하기'를 모둠별 토론 주제로 제시한다.  • 이차방정식의 판별식 D의 부호에 따른 원과 직선의 위치 관계를 정리한다. • 원과 직선의 위치 관계에 관한 문제를 푼다.
정리	• 본시 학습 내용을 정리한다.

(나)

수석 교사 : 전개 단계에서 토론 주제를 제시한 이유가 있나요?

신임 교사 : 네. 원과 직선의 위치 관계에 이차방정식의 판별식을 이용하는 이유도 모른 채 암기한 절차를 적용하는 것이 아니라, ㉠ <u>왜 그런지를 알고 그 절차도 연역할 수 있게 하려는</u> 의도입니다.

수석 교사 : 좋습니다. 그런데 원과 직선의 위치 관계를 판별식으로만 판단하고 있는데요, 최근에 배운 내용을 이용하는 다른 방법으로는 무엇이 있을까요?

신임 교사 : 아, 생각났어요. (㉡) 그럼 이 방법을 추가하는 것으로 수정하겠습니다.

수석 교사 : 한 가지가 더 있습니다. 이차방정식의 판별식을 이용하여 원과 직선의 위치 관계를 도출하기 전에 학생들이 그 방법을 추론해 보게 하는 것은 어떨까요?

신임 교사 : <공통수학1>에서 배운 '이차함수의 그래프와 직선의 위치 관계'와 연결하라는 말씀이시군요.

수석 교사 : 네. 엄밀한 논리적 전개가 아니더라도 학생의 추론 역량 함양을 위해서는 개연적 추론도 중요합니다.

신임 교사 : 그럼 ㉢ <u>학생의 추론을 유도하는 적절한 발문을 준비해 보겠습니다.</u>

<작성 방법>

- ○ 밑줄 친 ㉠에 해당하는 용어를 스켐프(R. Skemp)가 제시한 이해의 관점에서 쓸 것.
- ○ 괄호 안의 ㉡에 들어갈 방법을 <공통수학2>의 '도형의 방정식'에서 학습한 내용을 이용하여 제시할 것.
- ○ 밑줄 친 ㉢에 해당하는 개연적 추론 유형을 쓰고, 이 추론을 유도하는 적절한 발문 1가지를 제시하되, 폴리아(G. Polya)가 제시한 문제 해결의 '계획 수립' 단계에 근거할 것.

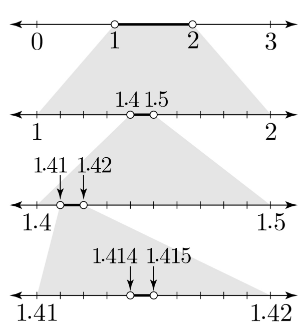
6. 다음은 지도 교수와 예비 교사가 나눈 대화이다. <작성 방법>에 따라 서술하시오. [4점]

예비 교사 : 교육 실습 때 중학생을 가르쳐 보니 학생들이 무리수 개념을 이해하기 어려워하는 것 같았습니다.

지도 교수 : 역사적으로 수학자들이 무리수 개념을 수용하는 데 오래 걸렸다고 하니, 학생들이 어려움을 겪는 것은 이해가 되지요. 스파드(A. Sfard)는 수 개념의 역사적 발달 과정 속에서 수학적 정의와 표상이 '과정으로서의 조작적 방법'과 '대상으로서의 (㉠)적 방법'의 두 가지 형태가 교대로 나타나면서 수학적 개념이 형성된다고 보았습니다.

예비 교사 : 아하, 두빈스키(E. Dubinsky)의 APOS 이론과도 비슷한 관점이군요.

지도 교수 : 맞습니다. 무리수 개념을 예로 들면, $\sqrt{2}$와 같은 무리수를 도입할 때, 제곱근의 대소 관계를 이용하여 $\sqrt{2}$가 순환하지 않는 무한소수임을 다음과 같이 직관적으로 설명합니다.

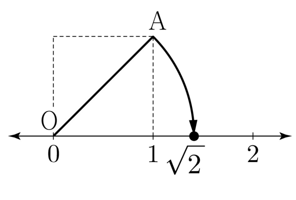
> $1^2 < 2 < 2^2$이므로 $1 < \sqrt{2} < 2$이다.
> $1.4^2 = 1.96$, $1.5^2 = 2.25$이므로
> $1.4^2 < 2 < 1.5^2$이고
> $1.4 < \sqrt{2} < 1.5$임을 알 수 있다.
> 또, $1.41^2 = 1.9881$, $1.42^2 = 2.0164$
> 이므로 $1.41^2 < 2 < 1.42^2$이고
> $1.41 < \sqrt{2} < 1.42$임을 알 수 있다.
> 이를 반복하여 $\sqrt{2}$를 소수로 나타내면
> $1.41421356237309504880 1\cdots$이다.
>
> 
>

예비 교사 : 이렇게 동일한 조작을 반복하면, $\sqrt{2}$의 소수부분이 끝없이 계속되는 상태, 즉 '가능적 무한'임을 직관적으로 알게 되겠군요.

지도 교수 : 그렇지요. 이 단계의 학생들은 무리수가 실제로 존재하는 수인지 아직 이해하기 어려워하기도 하지요.

예비 교사 : 정말 그렇습니다. 어떻게 설명하면 학생들이 잘 이해할까요?

지도 교수 : 한 변의 길이가 1인 정사각형의 대각선의 길이가 $\sqrt{2}$임을 이용할 수 있습니다. 오른쪽 그림과 같이 대각선 OA의 길이인 $\sqrt{2}$를 수직선 위의 한 점에 대응시켜 설명하면, 학생들은 무리수 $\sqrt{2}$가 실제로 존재하는 수임을 인식하게 됩니다.



<작성 방법>

- ○ 괄호 안의 ㉠에 들어갈 용어를 쓸 것.
- ○ APOS 이론의 '행동'(Action), '과정'(Process), '대상'(Object)에 해당하는 내용을 위에서 제시한 무리수 개념의 형성 과정과 관련지어 설명할 것.

7. 확장 복소평면(extended complex plane) $\mathbb{C}\cup\{\infty\}$에서 정의된 일차분수변환(선형분수변환, linear fractional transformation, bilinear transformation) T가

$$T(0)=-1,\ \ T(i)=-i,\ \ T(2)=3$$

을 만족시킬 때, $T(z)$를 풀이 과정과 함께 쓰시오.
또한 $W=\{T(z)\,|\,|z|=1,\ z\in\mathbb{C}\}$라고 할 때, W의 원소와 복소수 $1+i$ 사이의 거리의 최솟값을 풀이 과정과 함께 쓰시오. [4점]

8. 모든 성분이 실수인 3×3 대칭행렬(symmetric matrix) A가 다음 <조건>을 만족시킨다.

<조 건>

(가) 행렬 A의 행렬식(determinant)은 32이다.

(나) 행렬 $A^{-1}-\dfrac{1}{2}I$의 영공간(null space)은 두 벡터 $(1,\ -2,\ 1),\ (1,\ 2,\ -3)$으로 생성된다.

대각행렬(diagonal matrix) $D=(d_{ij})$와 직교행렬(orthogonal matrix) P가 $D=P^TAP$를 만족시킬 때, D와 P를 각각 풀이 과정과 함께 쓰시오. (단, A^{-1}은 A의 역행렬, I는 3×3 단위행렬, P^T는 P의 전치행렬(transpose matrix)이고 $d_{11}\le d_{22}\le d_{33}$이다.) [4점]

9. 3차원 유클리드 공간 $\mathbb{R}^3$에서 곡면

$$X(u,\ v) = (1+2u,\ 2\cosh u\cos v,\ 2\cosh u\sin v)$$

위의 $u=0,\ v=\dfrac{\pi}{4}$인 점 P에서 접평면(tangent plane)의 방정식을 풀이 과정과 함께 쓰시오.
또한 점 P에서 곡면 X의 가우스곡률(Gaussian curvature) K와 평균곡률(mean curvature) H의 값을 각각 풀이 과정과 함께 쓰시오. [4점]

10. 꼭짓점의 집합이 $V=\{v_1,\ v_2,\ v_3,\ v_4,\ v_5,\ v_6,\ v_7\}$인 단순그래프(simple graph) G가 다음 <조건>을 만족시킨다.

<조 건>

(가) $n\in\{1,\ 7\}$이면 $\deg(v_n)\le\chi(K_n)$이다.
(나) $n\in\{2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\}$이면 $\deg(v_n)\le\chi(K_{n,n})$이다.

이때, $\displaystyle\sum_{n=1}^{7}\deg(v_n)$의 값이 최대가 되도록 하는 G의 변(edge)의 개수를 풀이 과정과 함께 쓰시오. (단, $\deg(v_n)$은 꼭짓점 v_n의 차수(degree)이고, $\chi(K_n)$과 $\chi(K_{n,n})$은 각각 완전그래프(complete graph) K_n과 완전이분그래프(complete bipartite graph) $K_{n,n}$의 채색수(chromatic number)이다.) [4점]

11. 소수 157의 원시근(primitive root) 5에 대하여 집합 A를

$$A=\{5^i\mid i\text{는 100 이하의 양의 정수}\}$$

라고 할 때, 합동식 $x^6+1\equiv 0 \pmod{157}$의 해가 되는 A의 원소의 개수를 풀이 과정과 함께 쓰시오.
또한 다음 식의 값을 풀이 과정과 함께 쓰시오.

$$\sum_{i=1}^{155}\left\{\left(\frac{5^i}{157}\right)\left(\frac{i^3}{157}\right)\left(\frac{157-i}{157}\right)+\left(\frac{5^i-1}{157}\right)\right\}$$

(단, $\left(\frac{-}{-}\right)$는 르장드르 기호(Legendre symbol)이다.) [4점]

12. 실수 p에 대하여 함수 $f:[0,\infty)\to\mathbb{R}$이

$$f(x)=\begin{cases} x^p\cos\dfrac{1}{x}, & x>0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$$

이라고 하자. $p=\dfrac{1}{3}$일 때, 함수 f가 $x=0$에서 연속인지를 판별하고 그 이유를 쓰시오.
또한 $p=-1$일 때, 임의의 양수 L에 대하여 $f(x_0)=L$을 만족시키는 x_0이 존재함을 증명하시오. [4점]

<수고하셨습니다.>